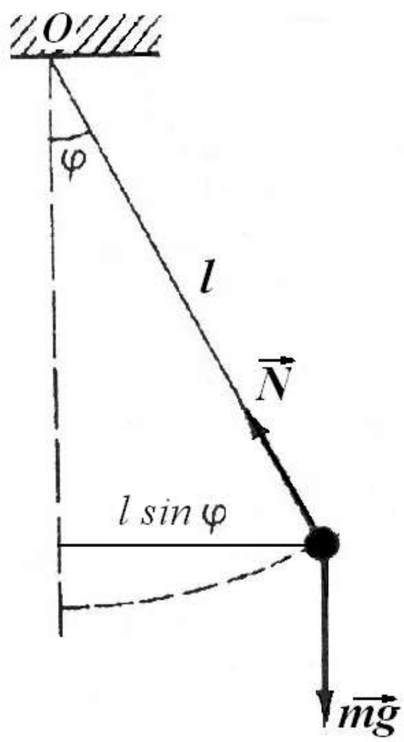
Лабораторна робота № 4. 6

Вивчення вільних коливань математичного маятника

Прилади: 1) математичний маятник; 2) секундомір.
Мета роботи: вивчити коливання математичного маятника, визначити прискорення вільного падіння за допомогою маятника.

Теоретичні відомості

Математичний маятник являє собою ідеалізовану систему, що складається з невагомої і нерозтяжної нитки, на якій підвішена матеріальна точка. Під дією сили тяжіння маятник здійснює коливання у вертикальній площині.



Хорошим наближенням може служити невелика важка куля, підвішена на довгій тонкій нитці.

Будемо характеризувати відхилення маятника від положення рівноваги кутом φ, який утворює нитка з вертикаллю.

Відповідно до рівняння динаміки обертального руху сумарний момент зовнішніх сил, що діють на тіло, дорівнює добутку моменту інерції тіла на кутове прискорення

$$\Sigma M^{зовн} = I\,\varepsilon.$$

На маятник діють дві сили - сила тяжіння ***mg*** і сила натягу нитки ***N***. При відхиленні маятника від положення рівноваги виникає крутний момент, який створюється тільки силою тяжіння. Момент сили натягу відносно точки *O* дорівнює нулю, тому що сила проходить через точку підвісу *O*.

Обертаючий момент *M* (момент сили тяжіння) дорівнює за модулем добутку сили *mg* на плече l sin φ (див. рис)

$$M = -\,mg\,l\sin\varphi.$$

Мінус поставлений в зв'язку з тим, що момент сили і кутове відхилення φ мають протилежні знаки. Кут φ відраховується проти годинникової стрілки, а сила обертає за годинниковою стрілкою.

Підставимо момент інерції матеріальної точки $I = ml^2$ і кутове прискорення як другу похідну від кута за часом $\varepsilon = \ddot{\varphi}$

$$ml^2\,\ddot{\varphi} = -mgl\,sin\,\varphi\ . \qquad (1)$$

Скористаємося розкладанням синуса в ряд Тейлора

$$sin\,\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots \qquad (2)$$

(точками позначені інші члени ряду).

Звідси видно, що для досить малих φ можна знехтувати в (2) всіма членами ряду, крім першого.

Тому у випадку малих коливань можна покласти синус φ рівним самому куту φ (в радіанах):

$$\sin\varphi \approx \varphi.$$

Наприклад, для $\varphi = 0{,}10$ *рад* (5,73°) $\sin\varphi = 0{,}0998$,

$$0{,}1 \approx 0{,}0988.$$

Для $\varphi = 0{,}20$ *рад* (11,46°) $\sin\varphi = 0{,}1987$

$$0{,}2 \approx 0{,}1987.$$

Але вже для $\varphi = 1{,}0$ *рад* (57,3°) $\sin\varphi = 0{,}841$

$$1{,}0 \neq 0{,}841.$$

Які ж кути відповідають «малим» відхиленням? Це залежить від точності вимірювань. Якщо рахувати до двох знаків після коми, то кут φ не повинен перевищувати приблизно 15 °.

У зв'язку з викладеним, рівняння динаміки набуває вигляду

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l}\right)\varphi = 0.$$

Оскільки коефіцієнт $\frac{g}{l}$ є додатним, його можна позначити як квадрат деякої величини

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \qquad . (3)$$

В результаті отримуємо рівняння

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \qquad (4)$$

Це рівняння називається диференціальним, оскільки в нього входить крім невідомої величини φ і її похідна (друга). Загальний метод вирішення таких рівнянь розглядається в курсі вищої математики. Рішення (4) має вигляд

$$\varphi = a\cos(\omega t + \alpha_0). \qquad (5)$$

Можна безпосередньою підстановкою в диференціальне рівняння переконатися в тому, що рішення задовольняє йому, тобто звертає його в тотожність.

Отже, при малих коливаннях кутове відхилення математичного маятника змінюється з часом за гармонічним законом.

При цьому a - абсолютне значення найбільшого кутового зміщення - називається амплітудою, ω - циклічною частотою коливань, $(\omega t + \alpha_0)$ – фазою коливань, яка визначає значення зміщення в момент часу t, α_0 - початковою фазою.

Фізичний зміст циклічної частоти ω пов'язаний з поняттям періоду Т коливань. Періодом називають тривалість одного повного коливання, тобто найменший проміжок часу, через який повторюється довільно вибраний стан коливальної системи. За один період фаза коливань отримує приріст 2π

$$\omega(t + T) + \alpha_0 = \omega t + \alpha_0 + 2\pi,$$

звідки

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (6)$$

Тоді з урахуванням (3) отримаємо формулу періоду коливань математичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{7}$$

З формули періоду коливань випливають такі закономірності коливань математичного маятника:

1) період коливань маятника не залежить від амплітуди коливань (для малих значень кута відхилення);

2) період коливань маятника не залежить від маси маятника;

3) період коливань маятника прямо пропорційний квадратному кореню з довжини маятника і обернено пропорційний квадратному кореню з прискорення вільного падіння.

Математичний маятник використовують для вимірювання прискорення вільного падіння. З формули (7) слід

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}l\,. \tag{8}$$

З переміщенням від полюса до екватора Землі прискорення вільного падіння внаслідок обертання Землі зменшується від значень g = 9,83 м/с^2 на полюсі до значень g = 9,78 м/с^2 на екваторі. Ці зміни найкраще виявляються за допомогою математичного маятника.

Крім того, земна кора в різних місцях має неоднаковий склад, тому в місцях, де кора має велику густину, прискорення вільного падіння збільшується. За зміною g на певній площі, вимірюючи його математичним маятником, геологи судять про зміни густини поверхні земної кори і на підставі цих даних виводять висновок про наявність корисних копалин. Це і є так звана гравітаційна розвідка корисних копалин, що застосовується в геофізиці.

Вимірювання

Робота складається з двох частин.

1. **Встановлення ізохронності коливань**, тобто незалежності періоду коливань від амплітуди.

Кут відхилення при цьому, відповідно до теорії, повинен бути невеликий. У таблиці наведені різні значення відхилень, відповідні їм кути в градусах і радіанах, і синуси цих малих кутів

x	*Угол* φ, *градусы*	sin φ	*Угол* φ, *радианы*
20 см	5, 73	0,10	0,10
30 см	8,63	0,15	0,15
40 см	11,54	0,20	0,20

Як видно з таблиці, вимога рівності синуса кута φ самому куту φ, вираженому в радіанах, при цих відхиленнях виконується (з точністю до двох знаків) добре, отже, кути можна вважати малими за даної довжини нитки l = 2,95 м.

Користуючись секундоміром, визначають період коливань маятника для різних початкових відхилень маятника від положення рівноваги. Дослід виконують по черзі для x = 20, 30 і 40 см. Кожен раз визначають сумарний час великого числа коливань (30 - 50 повних, тобто туди і назад коливань) і обчислюють період коливань маятника. Період визначається по три рази для кожного початкового значення відхилення.

Дані досліду заносять в таблицю. Переконуються в тому, що період коливань не залежить від амплітуди коливань (початкового відхилення маятника).

2. **Обчислення прискорення вільного падіння g.**

За даними вимірів періодів, занесеними в таблицю, за формулою (8) визначають прискорення вільного падіння для даної місцевості.

Потім, користуючись наближеною формулою залежності прискорення вільного падіння від географічної широти $\varphi_ш$ місцевості

$$g = 9{,}78049\,(1 + 0{,}0052884\,\sin^2\varphi_ш - 0{,}0000059\,\sin^2 2\varphi_ш) - 0{,}00011,$$

розраховують теоретичне значення g для широти м.Дніпра ($\varphi_ш$ = 48°27′ північної широти) і порівнюють зі значенням, отриманим на досліді.

Контрольні питання

1. Підставте рішення (5) в рівняння (4) і переконайтеся в тому, що цей вираз звертає його в тотожність. За якої умови це можливо?
2. Перерахуйте властивості гармонічного коливання маятника.
3. За яких кутах коливання маятника можна вважати гармонічним і чому?

<table>
<tr><th>x, см</th><th>l, м</th><th>T_i</th><th>$\langle T\rangle$</th><th>ΔT_i</th><th>$S_{\langle T\rangle}$</th><th>ΔT</th><th>E,%</th><th>g_i</th><th>$\langle g\rangle$</th><th>Δg_i</th><th>$S_{\langle g\rangle}$</th><th>Δg</th><th>E,%</th></tr>
<tr><td rowspan="3">20</td><td rowspan="9">2,95</td><td></td><td rowspan="9"></td><td></td><td rowspan="9"></td><td rowspan="9"></td><td rowspan="9"></td><td></td><td rowspan="9"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="9"></td><td rowspan="9"></td><td rowspan="9"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">30</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">40</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

$$g = \langle g\rangle \pm \Delta g$$

Склав І.П.Гаркуша